ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN XUÂN TRÌU

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHIẾU GIẢI HỆ BÀI TOÁN CÂN BẰNG HỖN HỢP TỔNG QUÁT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

1. TS. Trương Minh Tuyên
2. TS. Phạm Hồng Trường

Thái Nguyên – 2020

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Trương Minh Tuyên, người đã tân tình giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu để hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, các thầy giáo, cô giáo trong khoa Toán–Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã tận tình giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại Trường.

Tôi xin chân thành cảm ơn các đồng chí lãnh đạo phòng Giáo dục và Đào tạo, Ban giám hiệu trường THCS Tân Lập huyện Vũ Thư, tỉnh Thái Bình đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi trong suốt thời gian đi học.

Nhân dịp này, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, người thân, bạn bè đã động viên, khích lệ, tạo điều kiện giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt

X	không gian Banach
X^*	không gian đối ngẫu của X
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\cap$	phép giao
$\operatorname{int} M$	phần trong của tập hợp M
$\inf M$	cận dưới đúng của tập hợp số M
$\sup M$	cận trên đúng của tập hợp số M
$\max M$	số lớn nhất trong tập hợp số M
$\min M$	số nhỏ nhất trong tập hợp số M
$\operatorname{argmin}_{x\in X} F(x)$	tập các điểm cực tiểu của hàm F trên X
$\emptyset$	tập rỗng
$\operatorname{dom}(A)$	miền hữu hiệu của toán tử (hàm số) A
$R(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
$F(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
$\hat{F}(T)$	tập điểm bất động tiệm cận của ánh xạ T
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f
$\bigtriangledown f$	gradient của hàm f
$\overline{M}$	bao đóng của tập hợp M

proj_C^f	phép chiếu Bregman lên C
$D_f(x, y)$	khoảng cách Bregman từ x đến y

Mở đầu

Bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn hay vô hạn ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert hay không gian Banach là một trường hợp riêng của bài toán chấp nhận lồi: "Tìm một phần tử thuộc giao khác rỗng của một họ hữu hạn hay vô hạn các tập con lồi và đóng $\{C_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ của không gian Hilbert H hay không gian Banach X", với $\mathcal{I}$ là tập chỉ số bất kỳ. Bài toán này có nhiều ứng dụng quan trọng trong các lĩnh vực khoa học khác nhau như: Xử lí ảnh, khôi phục tín hiệu, vật lý, y học ... Khi C_i là tập nghiệm của các bài toán cân bằng (tổng quát), thì đã có nhiều phương pháp được đề xuất dựa trên các phương pháp lặp cổ điển nổi tiếng. Đó là các phương pháp lặp Kranoselskii, Mann, Ishikawa, Halpern, phương pháp xấp xỉ mềm hay các phương pháp sử dụng các siêu phẳng cắt ...

Cho đến nay vấn đề nghiên cứu các phương pháp xấp xỉ nghiệm của hệ bài toán cân bằng trong không gian Hilbert hay Banach vẫn là một chủ đề thu hút sự quan tâm của nhiều người làm toán trong và ngoài nước. Bằng cách sử dụng công cụ khoảng cách Bregman thay cho khoảng cách thông thường, người ta đã tìm ra nhiều phương pháp xấp xỉ nghiệm của lớp các bài toán cân bằng. Ngoài ra, khi sử dụng khoảng cách Bregman người ta giải quyết được bài toán cân bằng, cùng các bài toán liên quan khác trên không gian Banach phản xạ mà không đòi hỏi thêm các tính chất hình học khác của không gian như tính lồi đều hay trơn đều.

Năm 2016, T.M. Tuyen [21] đã nghiên cứu đưa ra ba thuật toán chiếu cho bài toán tìm nghiệm của hệ bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát trong không gian Banach phản xạ. Cụ thể hơn, T.M. Tuyen đã giới thiệu và chứng minh sự hội tụ mạnh ba phương pháp lặp song song dựa trên phương pháp chiếu lai ghép (hybrid projection method) và phương pháp chiếu thu hẹp (shrinking projection method).

Mục đích của luận văn này là trình bày lại chi tiết các kết quả của T.M. Tuyen trong bài báo [21]. Theo đó, nội dung của luận văn được chia làm hai chương chính, trong đó:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, luận văn đề cập đến một số vấn đề về không gian Banach phản xạ, đạo hàm Gâteaux, đạo hàm Fréchet, hàm lồi, dưới vi phân của hàm lồi, phép biến đổi Young-Fenchel, khoảng cách Bregman, phép chiếu Bregman và toán tử Bregman không giãn mạnh.

Chương 2. Một số phương pháp chiếu giải hệ bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát

Nội dung của chương này là các kết quả của T.M. Tuyen về một phương pháp chiếu lai ghép và hai phương pháp chiếu thu hẹp cho bài toán tìm nghiệm của hệ bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát trong không gian Banach phản xạ. Ngoài ra, một số hệ quả của các định lý chính cho một số bài toán liên quan cũng được giới thiệu.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này bao bồm hai mục. Mục 1.1 trình bày về một số tính chất cơ bản của không gian phản xạ. Mục 1.2 giới thiệu về khoảng cách Bregman, phép chiếu Bregman và toán tử Bregman không giãn mạnh. Nội dung của chương này được tham khảo trong các tài liệu [1, 13, 16, 19, 22].

1.1 Không gian Banach phản xạ

Trước hết, trong mục này chúng tôi nhắc lại khái niệm không gian Banach phản xạ.

Định nghĩa 1.1.1. Một không gian Banach X được gọi là không gian phản xạ, nếu với mọi phần tử x^{**} của không gian liên hợp thứ hai X^{**} của X, đều tồn tại phần tử x thuộc X sao cho

$$\langle x, x^* \rangle = \langle x^*, x^{**} \rangle \text{ với mọi } x^* \in X^*.$$

Chú ý 1.1.2. Trong luận văn, chúng tôi sử dụng ký hiệu $\langle x^*, x \rangle$ để chỉ giá trị của phiếm hàm $x^* \in X^*$ tại $x \in X$.

Mệnh đề 1.1.3. [1] *Cho X là một không gian Banach. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

i) *X là không gian phản xạ.*

ii) *Mọi dãy bị chặn trong X, đều có một dãy con hội tụ yếu.*

Mệnh đề dưới đây cho ta mối liên hệ giữa tập đóng và tập đóng yếu trong không gian tuyến tính định chuẩn.

Mệnh đề 1.1.4. *Nếu C là tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian không gian tuyến tính định chuẩn X, thì C là tập đóng yếu.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại dãy $\{x_n\} \subset C$ sao cho $x_n \rightharpoonup x$, nhưng $x \notin C$. Theo định lý tách các tập lồi, tồn tại $x^* \in X^*$ tách ngặt x và C, tức là tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\langle y, x^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle - \varepsilon,$$

với mọi $y \in C$. Đặc biệt, ta có

$$\langle x_n, x^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle - \varepsilon,$$

với mọi $n \geq 1$. Ngoài ra, vì $x_n \rightharpoonup x$, nên $\langle x_n, x^* \rangle \to \langle x, x^* \rangle$. Do đó, trong bất đẳng thức trên, cho $n \to \infty$, ta nhận được

$$\langle x, x^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle - \varepsilon,$$

điều này là vô lý. Do đó, điều giả sử là sai, hay C là tập đóng yếu.
Mệnh đề được chứng minh. □

Chú ý 1.1.5. Nếu C là tập đóng yếu, thì hiển nhiên C là tập đóng.

1.2 Khoảng cách Bregman và ánh xạ Bregman không giãn mạnh

1.2.1 Đạo hàm Gâteaux và đạo hàm Fréchet

Cho X là một không gian Banach và cho $f: X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ là một hàm số. Ta ký hiệu miền hữu hiệu $\text{dom} f$ là tập $\{x \in X : f(x) < +\infty\}$. Với mỗi $x \in \text{int dom} f$ và $y \in X$, ta ký hiệu $f'(x, y)$ là đạo hàm phải của f tại x theo hướng y, tức là

$$f'(x, y) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + ty) - f(x)}{t}.$$

Định nghĩa 1.2.1. Hàm f được gọi là khả vi Gâteaux tại x nếu giới hạn $\lim_{t\to 0}(f(x + ty) - f(x))/t$ tồn tại với mọi y. Trong trường hợp này $f'(x, y)$ trùng với $(\bigtriangledown f)(x)$, giá trị của gradient $\bigtriangledown f$ của f tại x.

Định nghĩa 1.2.2. Hàm f được gọi là khả vi Fréchet tại x nếu giới hạn trên tồn tại đều trên tập $\{y \in X : \|y\| = 1\}$. Hàm f được gọi là khả vi Fréchet đều trên tập con C của X nếu giới hạn trên tồn tại đều với mọi $x \in C$ và $\|y\| = 1$.

Chú ý 1.2.3. i) Nếu hàm f khả vi Gâteaux (Fréchet) trên X, thì toán tử gradient $\bigtriangledown f$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X.

ii) Ta biết rằng nếu f là khả vi Gâteaux (khả vi Fréchet) trên int dom$f$, thì f liên tục và đạo hàm Gâteaux $\bigtriangledown f$ của nó là liên tục từ tôpô mạnh vào tôpô yếu* trên int dom$f$ (xem [6]).

iii) Nếu f khả vi Fréchet đều trên X, thì tồn tại số M sao cho $\| \bigtriangledown f(x)\| \leq M$, với mọi $x \in X$.

Dưới đây một tính chất đơn giản của hàm khả vi Fréchet đều.

Mệnh đề 1.2.4 (xem [2], Định lý 1.8)**.** *Nếu $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ khả vi Fréchet đều, thì f liên tục đều trên X.*

Chứng minh. Lấy bất kỳ $u, v \in X$. Xét hàm số $h(t) = f[u + t(v-u)]$ với mọi $t \in [0,1]$. Khi đó, ta có

$$\frac{h(t+\tau) - h(t)}{\tau} = \frac{f([u + (t+\tau)(v-u)]) - f[u + t(v-u)]}{\tau}.$$

Vì f khả vi Fréchet đều trên X, nên khi cho $\tau \to 0$, ta nhận được

$$h'(t) = \bigtriangledown f(u + t(v-u))(v-u).$$

Theo định lý Lagrange, tồn tại $\theta \in (0,1)$ sao cho

$$h(1) - h(0) = h'(\theta).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} |f(u) - f(v)| &= |h(1) - h(0)| \\ &= | \bigtriangledown f(u + \theta(v-u))(v-u)| \\ &\leq \| \bigtriangledown f(u + \theta(v-u))\| \|u - v\|. \end{aligned}$$

Từ Chú ý 1.2.3 iii), suy ra tồn tại M sao cho $\| \bigtriangledown f(x)\| \leq M$, với mọi $x \in X$. Do đó, ta nhận được

$$|f(u) - f(v)| \leq M\|u - v\|.$$

Vậy f liên tục đều trên X. □

1.2.2 Hàm lồi và khoảng cách Bregman

Định nghĩa 1.2.5. Cho $D \subset X, f: D \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

i) Hàm f được gọi là chính thường nếu dom $f \neq \emptyset$ và $f(x) > -\infty (\forall x \in D)$, trong đó

$$\text{dom } f = \{x \in D : f(x) < \infty\}.$$